

Proposta de mini-curso para a Escola de Álgebra

Tiago Jardim da Fonseca

Setembro 2025

Título: Extensões abelianas de corpos quadráticos imaginários

Resumo: O teorema de Kronecker-Weber afirma que todo número algébrico de grupo de Galois abeliano pode ser escrito em termos de raízes da unidade. Por exemplo:

$$\sqrt{5} = e^{2\pi i/5} - e^{4\pi i/5} - e^{6\pi i/5} + e^{8\pi i/5}.$$

Mais precisamente, toda extensão abeliana do corpo dos racionais está contida em uma extensão ciclotômica. É natural se perguntar se há resultados parecidos para outros corpos de números; este é o décimo-segundo problema de Hilbert.

O objetivo deste mini-curso é apresentar alguns aspectos da teoria clássica de extensões abelianas de corpos quadráticos imaginários (isto é, corpos da forma $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, onde d é um inteiro positivo não-quadrado). Neste caso, no lugar da função exponencial, as extensões abelianas são descritas por valores especiais de funções modulares e elípticas. Ou, geometricamente, no lugar dos pontos de ordem finita no círculo unitário, consideramos pontos de ordem finita em uma curva elíptica. Este resultado deriva da chamada teoria da multiplicação complexa, considerada por Hilbert a “parte mais bela de toda a matemática”.

A teoria acima serviu de base para o desenvolvimento da bem-estabelecida teoria de corpos de classe, e continua servindo de motivação para uma série de desenvolvimentos recentes em teoria dos números. Havendo tempo e interesse, alguns destes desenvolvimentos poderão ser abordados ao fim do mini-curso.

Pré-requisitos: Anéis e corpos (incluindo teoria de Galois).